**CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HÌNH HỌC**

**Bài 1: Chứng minh ba điểm thẳng hàng**

A. Các phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng

Giả sử chứng minh 3 điểm  thẳng hàng

1. Chứng minh 3 điểm cùng thuộc một đường thẳng 

2. Chứng minh đường thẳng  đi qua 

3. Diện tích  (đvdt)

4. Sử dụng các tính chất cách đều (2 đường thẳng cắt nhau, song song)

5. Dùng phương pháp phản chứng

1. Chứng minh hai góc kề nhau có tổng bằng 

2. Sử dụng tiên đề Ơclit về đường thẳng song song:

Qua một điểm nằm ngoài đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

3. Sử dụng vuông góc, song song:

+  và 

+  và 

4. Sử dụng hai tia trùng nhau

5. Sử dụng điểm (hình) duy nhất (trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm tam giác, trực tâm tam giác)

6. Thêm điểm: Muốn chứng minh ba điểm  thẳng hàng ta chứng minh ba điểm  thẳng hàng và ba điểm  thẳng hàng.

B. Bài tập

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** Chứng minh hai góc kề nhau có tổng bằng | |
| Cho tam giác  nhọn. Đường tròn đường kính  cắt cạnh  lần lượt tại  và . Gọi  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của  và ,  là điểm đối xứng của  qua đường thẳng . Chứng minh  điểm  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Ta có  đối xứng với  qua  Tứ giác  nội tiếp (tổng hai góc đối bằng )    Chứng minh tương tự ta có  Mà  Vậy | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2:** Sử dụng tiên đề Ơclit | |
| Cho tam giác  có  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .  cắt đường tròn  ở . Gọi  lần lượt là điểm chính giữa các cung  (không chứa ,  (không chứa ,  là giao điểm của  và ,  là giao điểm của  và . Chứng minh  thẳng hàng |  |
| **Lời giải**  Ta có  cân tại  Vì  là điểm chính giữa cung  nên  là phân giác của  Từ (1)(2)  là trung trực của  Mà  Chứng minh tương tự ta có  Từ (3)(4) suy ra  thẳng hàng (Tiên đề Ơclit) | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** Sử dụng vuông góc | |
| Cho hình vuông  là điểm trên cạnh . Vẽ  vuông góc với  tại ,  cắt  ở . Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng ba điểm , ,  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Tam giác  có hai đường cao  và  cắt nhau tại  là trực tâm của  Vì  là hình vuông  Tứ giác  nội tiếp  là nội tiếp  Từ (1)(2)  thẳng hàng. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4:** Sử dụng hai tia trùng nhau | |
| Cho hình thang cân . Điểm  bất kì trên . Vẽ đường tròn  tiếp xúc với  tại  và đi qua , đường tròn tâm  tiếp xúc với  tại  và đi qua , . Chứng minh rằng ba điểm , ,  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Ta có  Vì  là hình thang cân  nội tiếp    Mà  là hình thang cân  Từ (1)(2)(3)  trùng tia . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5:** Sử dụng điểm (hình) duy nhất | |
| Cho tam giác  vuông tại ,  là đường cao. Vẽ hai đường tròn ,  có đường kính lần lượt là , . Vẽ  là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn ,  (, ),  và  nằm trên nửa mặt phẳng bờ  không chứa . Gọi  là trung điểm đoạn thẳng . Chứng minh , ,  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Kéo dài  cắt  tại  Chứng minh  Vì  là tiếp tuyến chung của  và  Theo tính chất tiếp tuyến  là trung điểm của | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 6:** Thêm điểm | |
| Cho tam giác ,  là đường cao,  là trực tâm. Vẽ  tại  và  tại ,  tại . Chứng minh rằng  điểm  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Hạ  Tứ giác  nội tiếp  Mà  (phụ ),  (đồng vị)  Tứ giác  nội tiếp  Vậy  thẳng hàng  Chứng minh tương tự ta có  thẳng hàng  Vậy  thẳng hàng. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 7:** | |
| Đường thẳng Simson  Cho tam giác  nội tiếp đường tròn  và  là điểm bất kì trên . Gọi , ,  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  trên các đường thẳng . Chứng minh  thẳng hàng. Đường thẳng đi qua  có tên là đường thẳng Simson ứng với điểm  của tam giác |  |
| **Lời giải**  Xét trường hợp tam giác  nhọn và  (các trường hợp khác chứng minh tương tự)  Khi đó  thuộc tia đối của tia ,  và  ương ứng nằm trên cạnh ,  Vì các tứ giác  và  nội tiếp    Do đó  thẳng hàng (đpcm) | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 8:** | |
| Cho tam giác  và một điểm . Gọi , ,  tương ứng là hình chiếu vuông góc của  trên các đường thẳng . Biết rằng ba điểm  thẳng hàng. Chứng minh rằng  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác . |  |
| **Lời giải**  Không mất tính tổng quát, ta xét trường hợp điểm  nằm trong góc  Các tứ giác  là tứ giác nội tiếp nên  Ta lại có  Tứ giác  nội tiếp nên    Do đó tứ giác  nội tiếp  Suy ra  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 9:** | |
| Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn . Gọi  là giao điểm của ;  là giao điểm của . Các tiếp tuyến với  tại ,  cắt nhau tại . Chứng minh  thẳng hàng |  |
| **Lời giải**  Gọi  là giao điểmcủa đường tròn qua  và đường tròn qua  Ta có  Mặt khác  Suy ra  nội tiếp  Ta lại có  hai tia  trùng nhau  thẳng hàng  Tương tự ta có  là hai tia trùng nhau  thẳng hàng  Vậy  thẳng hàng. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 10:** | |
| Cho tam giác . Đường tròn  đường kính  cắt  lần lượt tại  và . Gọi  là giao điểm của  và . Đường thẳng qua  và vuông góc với  cắt đường thẳng vuông góc với  tại  ở . Gọi  là trung điểm của . Chứng minh  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  vuông tại ,  là đường trung tuyến  cân tại  cân tại  có  là hai đường cao cắt nhau tại  là trực tâm  Do đó  đi qua trung điểm của  là đường trung trực của  Xét  và  có  cạnh chung  Do đó  Ta có  thẳng hàng. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 11:** | |
| Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn , các đường cao  và  cắt nhau tại . Đường tròn  ngoại tiếp tam giác  cắt đường tròn  ở  ( khác . Vẽ đường kính  của đường tròn . Chứng minh  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Gọi  là giao điểm của  và  Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  là trung điểm của  Ta có  Tương tự ta có  là hình bình hành  Suy ra  là trung điểm của  có  lần lượt là trung điểm của  và  Suy ra  là đường trung bình của  Ta có  là hình bình hành  Mà hai đường tròn  và  cắt nhau ở  là đường trung trực của  Ta có  Mà ;  thẳng hàng. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 12:** | |
| Cho đường tròn  nội tiếp tam giác .  lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn  với các cạnh . Đường thẳng qua  song song với  cắt  tại . Gọi  là trung điểm của . Chứng minh  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Qua  vẽ đường thẳng song song với  cắt ,  lần lượt tại ,  Ta có  Suy ra  cân tại  Tương tự ta có  Mà  có  Xét  và  có  là hai tia trùng nhau  Vậy  thẳng hàng. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 13:** | |
| Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn  (),  là trực tâm tam giác . Đường tròn đường kính  cắt đường tròn  ở  ( khác . Gọi  là trung điểm của cạnh . Chứng minh rằng  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  Vẽ đường kính  của đường tròn  Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  Do đó  thẳng hàng  Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  Mà  ( là trực tâm của tam giác )  Do đó  Do vậy tứ giác  là hình bình hành  Mà  là trung điểm của  nên  là trung điểm của  thẳng hàng  Từ (1)(2) ta có  thẳng hàng  Vậy  thẳng hàng. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 14:** | |
| Đường thẳng Stainơ. Áp dụng đường thẳng Simson  Cho tam giác  nhọn nội tiếp đường tròn .  là một điểm bất kì trên .  là trực tâm của tam giác . Chứng minh rằng  và các điểm đối xứng của  qua  thẳng hàng |  |
| **Lời giải**  Cách 1: Xét điểm  thuộc cung nhỏ  Gọi  là hình chiếu của  trên đường thẳng  Gọi  là các điểm đối xứng của  qua  Kéo dài  cắt  tại  Ta có  là tứ giác nội tiếp  Chứng minh tương tự ta có  Từ (1)(2) suy ra  thẳng hàng  Tương tự ta có  thẳng hàng  Cách 2: Gọi  cắt đường tròn  tại điểm ,  Khi đó dễ dàng chứng minh được  đối xứng với  qua  và  Từ đó, ta có các tứ giác  là các hình thang cân  Suy ra    Do đó    Vậy ba điểm  thẳng hàng  Mà  thẳng hàng (đường thẳng simson)  Từ đó suy ra  thẳng hàng  Từ (1)(2) suy ra  thẳng hàng.  \*) Nhận xét: Đường thẳng  này có tên là đường thẳng Steniner | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 15:** | |
| Cho tam giác  nội tiếp đường tròn ,  là điểm thuộc cung  không chứa đỉnh . Gọi  là hình chiếu của  lần lượt trên các cạnh . Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Hướng dẫn: Hình vẽ có dạng đường thẳng Simson, do đó ba điểm  thẳng hàng. Do yêu cùa của kết luận, nên ta cần tìm cặp tam giác đồng dạng để suy ra được  Từ các góc cua các tứ giác nội tiếp, ta tìm được hướng chứng minh  Lời giải:  Theo bài toán Simson thì  thẳng hàng, các tứ giác ,  nội tiếp nên  ;  Do đó  Mặt khác  đpcm. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 16:** | |
| Cho  là một tứ giác nội tiếp. Gọi  và  tương ứng là chân đường vuông góc hạ từ  xuống các đường thẳng . Chứng minh rằng  khi và chỉ khi các đường phân giác của các góc  và  cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng |  |
| **Lời giải**  Từ đề bài ta có  thuộc một đường thẳng (đường thẳng Simson)  Trên tia đối của tia  lấy điểm  sao cho  Theo tính chất đường phân giác của tam giác, ta có  thuộc  khi và chỉ khi    Mặt khác  (cùng bù với )  nên  Mà tứ giác  nội tiếp  nên  Dễ thấy  Từ (4)(5) suy ra  \*) Nhận xét: Ngoài ra chúng ta có thể giải trực tiếp như sau:  Ta có  thẳng hàng  Từ các tứ giác nội tiếp  Tương tự ta có  Do đó  Điều đó tương đương với chân đường phân giác của các góc  và  cắt nhau ở tại một điểm nằm trên đường thẳng . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 17:** | |
| Từ điểm  trên cung  của đường tròn ngoại tiếp tam giác , kẻ  lần lượt vuông góc với . Gọi  là điểm đối xứng với  qua . Kẻ  lần lượt vuông góc với . Chứng minh rằng |  |
| **Lời giải**  Vận dụng tính chất đường thẳng Simson ta có  thẳng hàng và  thẳng hàng.  Tứ giác  là tứ giác nội tiếp  là đường kính  Mặt khác,  Tứ giác  là tứ giác nội tiếp  Mà  Suy ra . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 18:** Chuyên Bắc Ninh, năm học 2013 | |
| Cho đường tròn  đường kính . Điểm  nằm ngoài đường tròn  sao cho tam giác  nhọn. Từ  kẻ  tiếp tuyến ,  với  (,  là các tiếp điểm). Gọi  là trực tâm của ,  là giao điểm của  và  a) Chứng minh rằng  điểm  cùng thuộc  đường tròn  b) Chứng minh rằng  điểm  thẳng hàng. |  |
| **Lời giải**  a) Nhận thấy  thuộc đường tròn đường kính  b) Giả sử ,  có vị trí như hình vẽ  Ta có: Tứ giác  nội tiếp (theo a)    Với  thì  Tứ giác  nội tiếp  (cgc)    Từ (1)(2)  thẳng hàng. | |

|  |
| --- |
| **Bài 19:** |
| Cho đường tròn  và  tiếp xúc ngoài tại .  và  là đường kính của  và  ,  là tiếp tuyến chung ngoài .  cắt  tại  a) Tam giác  là tam giác gì  b) Chứng minh  là tiếp tuyến chung của  và  c) Kẻ  vuông góc với .  cắt  tại . Chứng minh  thẳng hàng  d) Về cùng phía của nửa mặt phẳng bờ , vẽ nửa đường tròn đường kính  và . Đường thẳng qua  cắt hai nửa đường tròn trên tại . Chứng minh |
|  |
| **Lời giải**  a) Tam giác  vuông tại . Có thể chứng minh như sau:    Mà  b) Dễ chứng minh được tứ giác  là hình chữ nhật. Từ đó chứng minh được  c) Kéo dài  cắt  tại . Ta sẽ chứng minh  trùng với  bằng cách chỉ ra  Thật vậy, dễ thấy  cùng thuộc một đường tròn đường kính  Mặt khác, chứng minh được tứ giác  nội tiếp  Suy ra  điểm  thuộc đường tròn đường kính  d) (ghi chú: Đường thẳng qua  cắt nửa đường tròn đường kính  tại  và cắt nửa đường tròn đường kính  tại  Gọi  lần lượt là tâm của nửa đường tròn đường kính  và  Gọi  lần lượt là bán kính của đường tròn  và  Không mất tính tổng quát, giả sử  Dễ tính được  là trung điểm của    Trong tam giác  ta có:  và  là trung điểm của  Trong tam giác  có  là đường trung bình nên ta có |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 20:** | |
| Cho  có  góc nhọn, trực tâm  và nội tiếp đường tròn . Vẽ đường kính  a) Chứng minh tứ giác  là hình bình hành  b) Vẽ . Chứng minh  thẳng hàng và  c) Gọi  là chân các đường cao thuộc các cạnh  của . Khi  cố định hãy xác định vị trí điểm  để tổng  đạt giá trị lớn nhất |  |
| **Lời giải**  a) Ta có , mà  Tương tự ta có  b)  là trung điểm của  Vì  là hình bình hành,  là trung điểm của  nên  thẳng hàng.  có  là đường trung bình  c) Ta có  nội tiếp đường tròn  mà  ( là tiếp tuyến tại    Tương tự ta có    lớn nhất khi  thẳng hàng  là điểm chính giữa cung lớn . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 21:** | |
| Cho đường tròn  ngoại tiếp  có  là trực tâm. Trên cung nhỏ  lấy điểm . Gọi  lần lượt là hình chiếu của  trên . Chứng minh  a) Ba điểm  thẳng hàng  b)  c)  đi qua trung điểm của |  |
| **Lời giải**  a) Tứ giác  nội tiếp được (vì )  Tứ giác  cũng nội tiếp được (vì )  Mặt khác ta có  (vì  do cùng bù với góc  của tam giác ABC)  Từ (1)(2) suy ra  thẳng hàng.  b) Vì  (vì  góc nội tiếp cùng chắn cung  hay  Tương tự ta có  hay  Mà  Từ (1)(2)(3)  c) Gọi giao của  với đường tròn  thứ tự là  là hình thang cân (vì )  Vẽ  là hình thang cân, có  là trục đối xứng (vì  và  đối xứng qua   là trung điểm của , mà  (vì  do  vì cùng bằng )  đi qua trung điểm của . | |

**Bài 2: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy**

\*) Các phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng

1. Ba đường thẳng cùng đi qua một điểm hoặc có 1 điểm thuộc cả 3 đường thẳng

2. Một đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng còn lại

3. Ba đường đang xét là ba đường đặc biệt trong tam giác: Ba đường cao, trung trực, trung tuyến, phân giác trong

4. Đưa đồng quy về thẳng hàng

5. Sử dụng định lí Mênnauyt và Ceva

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** | |
| Cho , vẽ đường cao . Gọi  là điểm đối xứng của  qua  và .  cắt  ở . Chứng minh rằng  đồng quy. |  |
| **Lời giải**  Vì  là trung trực của  Suy ra tứ giác  là tứ giác nội tiếp  Vì  là trung trực của  Vì  cân tại  Từ (1)(2)  nội tiếp  Từ (3)(4) ta có  điểm  cùng nằm trên một đường tròn  nội tiếp  Chứng minh tương tự ta có  Vậy  là  đường cao của  đồng quy. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2:** | |
| Cho ba điểm  thẳng hàng và theo thứ tự. Vẽ hai đường tròn  có đường kính  và . Gọi  là tiếp tuyến chung ngoài của  với . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua  vuông góc với , đường thẳng đi qua  vuông góc với  và  đồng quy. |  |
| **Lời giải**  Gọi  là giao điểm của đường thẳng qua  và vuông góc với  và qua  vuông góc với  Ta chứng minh  thẳng hàng  ta chứng minh  Từ giả thiết  nội tiếp  Ta có  (đồng vị)  Mà  nội tiếp  Từ (1)(2) suy ra  điểm  cùng thuộc một đường tròn | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** Hai đường thẳng cùng đi qua một điểm trên đường thẳng thứ ba | |
| Cho đường tròn  và điểm  nằm ngoài . Kẻ cát tuyến  tùy ý. Gọi  là đường kính vuông góc với . Các đường thẳng  cắt  tại . Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại  và đường thẳng  đồng quy. |  |
| **Lời giải**  có ba đường cao là  đồng quy tại  Gọi  là trung điểm của . Ta chứng minh  là tiếp tuyến của đường tròn  vuông tại  có trung tuyến    là tiếp tuyến của đường tròn  Chứng minh tương tự ta có  là tiếp tuyến của đường tròn .  Vậy ba đường thẳng đồng quy. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4:** | |
| Cho tam giác , gọi  là hai đường tròn đường kính  và .  cắt đường thẳng  ở  cắt đường thẳng  ở  cắt  tại  và . Chứng minh rằng  đồng quy. |  |
| **Lời giải**  Do  thẳng hàng, do đó  Tương tự ta có  là hai đường cao tương ứng hạ từ ,  của tam giác .  Vậy  đồng quy. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5:** | |
| Cho hai đường tròn  có  và có tiếp tuyến chung ngoài. Chứng minh rằng hai tiếp tuyến chung ngoài của chúng luôn cắt nhau trên đường thẳng nối tâm |  |
| **Lời giải**  Gọi  là tiếp tuyến chung ngoài thứ nhất. Ta có  và  nên đường thẳng  luôn cắt đường thẳng  tại  và  nằm ngoài  về phía  Theo định lí Talét ta có  Tương tự, tiếp tuyến chung ngoài thứ hai  cắt đường nối tâm tại  thì  nằm ngoài  về phía  và  Từ (1)(2) suy ra . Từ đó suy ra điều cần chứng minh. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 6:** | |
| Cho tam giác  vuông tại  có  và đường cao . Trên tia  lấy điểm  sao cho , vẽ hình vuông . Gọi  là giao điểm của  và . Đường thẳng qua  song song với  cắt đường thẳng qua  song song với  tại . Chứng minh ba đường thẳng  đồng quy. |  |
| **Lời giải**  Ta có  do cùng phụ với  Hay tam giác  vuông cân tại . Dễ dàng chứng minh được  là hình vuông nên hai đường chéo ,  cắt nhau tại trung điểm  của mỗi đường.  Mặt khác ta cũng có  nằm trên đường thẳng trung trực của  Do  là hình vuông nên  Như vậy ba đường thẳng  đồng quy tại . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 7:** | |
| Cho ba điểm  thẳng hàng và theo thứ tự. Vẽ hai đường tròn  có đường kính  và . Gọi  là tiếp tuyến chung ngoài của  và  với . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua  và vuông góc với  và đường thẳng đi qua  vuông góc với  cắt nhau trên đường thẳng . |  |
| **Lời giải**  Giả sử hai đường thẳng đang xét cắt nhau tại . Ta phải chứng minh  thẳng hàng  Theo giả thiết tứ giác  nội tiếp được trong đường tròn đường kính  Xét tứ giác , ta có  là tiếp tuyến chung ngoài  và  nên  Suy ra  Mặt khác  nội tiếp đường tròn.  Vì hai tứ giác  và  đều nội tiếp được nên ngũ giác ADECM nội tiếp được trong đường tròn đường kính  Suy ra , nhưng  Do đó  thẳng hàng | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 8:** | |
| Cho , về phía ngoài vẽ ba tam giác đều . Chứng minh  bằng nhau và đồng quy. |  |
| **Lời giải**  Ta có  Tương tự ta có  Giả sử  cắt  ở M. Ta chứng minh  thẳng hàng  Thật vậy, do  Nên các tứ giác  nội tiếp  Do đó  nội tiêp được  Do tính chất của góc nội tiếp nên  Vì hai góc này ở vị trí đối đỉnh nên  thẳng hàng. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 9:** Tuyển sinh vào 10 chuyên PTNK – ĐHQG Hồ Chí Minh | |
| Cho điểm  thay đổi trên nửa đường tròn đường kính . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên   và  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác  và . Các đường thẳng  cắt  lần lượt tại  và . Chứng minh rằng  đồng quy. |  |
| **Lời giải**  Gọi  là tâm của đường tròn đường kính . Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)    Mà ( là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CHB)  Do đó  nen tam giác  cân tại . Suy ra  Chứng minh tương tự ta có tam giác  cân tại  nên  Xét  cân tại ,  là đường phân giác nên đồng thời là đường cao, trung tuyến  Do đó  Tương tự ta có  Do đó  là đường trung bình của tam giác . Suy ra  Mặt khác  nội tiếp  Ta có  nội tiếp  Vậy  cùng nằm trên một đường tròn.  c) Ta có  nội tiếp  Tương tự ta có  Xét tam giác  có  là ba đường cao. Nên ba đường  đồng quy. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 10:** | |
| Đường tròn nội tiếp tam giác  tiếp xúc với  tại . Gọi  lần lượt là trung điểm của . Chứng minh rằng  và phân giác của  đồng quy. |  |
| **Lời giải**  Gọi  là giao điểm của  và . Ta chứng minh  đi qua điểm  (Với  là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác )  Kí hiệu  lần lượt là độ dài các cạnh đối diện, đường cao xuất phát từ các đỉnh , , . Giả sử  Hạ các đường cao  lần lượt vuông góc . Ta chứng minh  là phân giác góc . Tức là ta chứng minh  Thật vậy ta có  Do đó  mặt khác  Như vậy  cách đều hai cạnh  nên  là phân giác . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 11:** | |
| Cho tam giác  nhọn nội tiếp  đường tròn có trực tâm . Gọi  lần lượt là điểm đối xứng với  qua , , . Xét một đường thẳng  đi qua . Gọi  lần lượt là các đường thẳng đối xứng với  qua . Chứng minh rằng  đồng quy. |  |
| **Lời giải**  Do  lần lượt đối xứng với  qua  nên chúng nằm trên đường tròn ngoại tiếp  Giả sử  cắt  tại . Gọi  là giao điểm của  Ta có    Suy ra tứ giác  nọi tiếp, hay  thuộc đường tròn  Tương tự các cặp đường thẳng  và  cũng cắt nhau tại một điểm thuộc  Các đường thẳng này không phải là các cạnh của tam giác  nên nó cắt nhau tại một điểm . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 12:** | |
| Cho tam giác  nội tiếp đường tròn (O). Gọi  lần lượt là trung điểm của các cung . Các cạnh của tam giác  và  cắt nhau tạo thành một lục giác. Chứng minh ba đường chéo chính của lục giác đồng quy. |  |
| **Lời giải**  Từ giả thiết ta có  là ba đường phân giác của tam giác  nên chúng đồng quy tại  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  Kí hiệu lục giác tạo thành là  Xét một đường chéo chính, chẳng hạn . Theo tính chất của phân giác, ta có:    Giả sử  cắt BC,  tại  Theo trên ta có  Ta chứng minh được hai tam giác  đồng dạng với nhau  Suy ra  là phân giác góc  nên  Từ đó ta có ba đường chéo của lục giác đồng quy tại I. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 13:** | |
| Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc ngoài tại  với . Đường thẳng  cắt  tại  và cắt (O’) tại  với . Gọi  là trung điểm của .  là dây cung của  và vuông góc với  tại .  cắt (O’) tại điểm  a) Chứng minh rằng  điểm , ,  thẳng hàng  b) Chứng minh , ,  đồng qui. Trong đó  là giao điểm của  và |  |
| **Lời giải**  a) Ta có  (vì )  Dễ thấy  là trung điểm của  và , suy ra tứ giác  là hình bình hành  Và  Từ (1)(2)  thẳng hàng.  b) Chứng minh tương tự ta có  thẳng hàng.  đồng quy tại . | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 14:** | |
| Cho  không phải là tam giác cân. Đường tròn tâm  tiép xúc vưới các cạnh  lần lượt tại . Đường thẳng  cắt các đường thẳng  lần lượt tại  và  a) Chứng minh rằng  cùng thuộc một đường tròn  b) Chứng minh  đồng quy |  |
| **Lời giải**  a) TH1:  nằm giữa  và  (hình vẽ)  Ta có  ( cân)    thuộc  đường thẳng  TH2:  nằm giữa  và  (chứng minh tương tự)  b) Ta có theo câu a)  Tương tự ta có  Gọi  là giao điểm của  và  có  là các đường cao  là trực tâm của  thẳng hàng  đi qua  \*) Chú ý: Hoặc dùng  cũng được. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 15:** | |
| Cho tam giác  vuông tại . Trên cạnh  lấy  điểm , dựng đường tròn tâm  có đường kính . Đường thẳng  cắt đường tròn tâm  tại , đường thẳng  cắt đường tròn tâm  tại  a) Chứng minh tứ giác  là tứ giác nội tiếp và  là tia phân giác của góc  b) Gọi  là giao điểm của  với đường tròn . Chứng minh các đường thẳng  đồng quy  c) Chứng minh  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác |  |
| **Lời giải**  a) Dễ thấy  nội tiếp  b) Nhận thấy  lần lượt là các đường cao của tam giác  nên chúng đồng quy tại điểm  là trực tâm của tam giác  c) Tương tự ta có  là trực tâm của tam giác  với  đường cao .  Như vậy  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE | |